1. Обозначим через $A_n(r)$ объем $n$-мерного шара радиуса $r$. Тогда

$$A_n(r) = a_n \cdot r^n$$

   где $a_n$ - объем шара единичного радиуса. (следует из замены переменных в интеграле объема, уменьшающих все координаты в $r$ раз)

2. $$a_n = 2\int_0^1 A_{n-1}(\sqrt{1-x^2})dx$$

   В этой формуле мы варьируем одну из координат $x$ от 0 до 1 (а не от -1 до 1, поэтому коэффициент 2 в начале), каждое значение $x$ отсекает шар $(n-1)$-й размерности радиусом $\sqrt{1-x^2}$, и $A_{n-1}$ берет его объем. Для круга это выглядит так: мы берем вертикальный полукруг и разбиваем его на вертикальные линии. Для трехмерного шара - берем полушар и нарезаем на круги.

3. Замена переменных $x = \cos\theta$ и подстановка определения $A_{n-1}$ дает:

$$a_n = 2a_{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta d\theta$$

4. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta d\theta$ можно вычислить интегрированием по частям, представив $sin^n\theta = sin^{n-1}\theta \cdot (-\cos\theta)'$. После некоторых манипуляций, получается формула следующего вида:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta d\theta = (\dots) + \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta d\theta$$

   То, что в скобках, не играет роли для вычисления определенного интеграла, потому что это выражение, которое обнуляется как в $0$, так и в $\pi/2$. Выходит, что значение интеграла телескопируется вниз, набирая множители типа $\frac{n-1}{n}$, сдвигаясь на $-2$ по степени каждый раз, пока не дойдет до $n = 1$ или $n = 0$. В первом случае в конце выйдет интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 1$ , во втором $\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi/2$.

5. Видим, что при определении $a_{n-1}$ через $a_{n-2}$ тем же путем телескопические множители вида $\frac{n-2}{n-1}$ будут сокращаться с множителями вида $\frac{n-1}{n}$. Кроме того, если мы сделаем два шага, один из них обязательно подберет в конце множитель $1$, а второй $\pi/2$ (какой из них что подберет, зависит от четности $n$ ). Приходим к рекуррентной формуле, верной и для четных, и дня нечетных $n$ (что я специально проверил):

$$a_n = \frac{2\pi a_{n-2}}{n}$$

6. На этом я остановился. Начиная с $a_1 = 2$ и $a_2 = \pi$, эта формула легко позволяет вычислить объем единичного шара для любого $n$, и шара любого радиуса $r$, если добавить множитель $r^n$.